# 第 5 节 原函数构造（★★★）

## 内容提要

若题干给出一个含 $f'(x)$ 的不等式，让我们求解另外的与 $f(x)$ 有关的不等式，这类题往往需要从所给不等式出发，构造一个原函数（若 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数），并判断其单调性，用单调性来分析与 $f(x)$ 有关的不等式. 下面归纳一些常见的构造.

| 已知的不等式中所含结构 | 构造原函数的方法 |
| --- | --- |
| $xf'(x)+f(x)$ | $F(x)=xf(x)$，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$ |
| $xf'(x)-f(x)$ | $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ |
| $xf'(x)+2f(x)$ | $F(x)=x^2f(x)$，$F'(x)=x[xf'(x)+2f(x)]$ |
| $xf'(x)-2f(x)$ | $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$ |
| $f(x)+f'(x)$ | $F(x)=\mathrm{e}^xf(x)$，$F'(x)=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]$ |
| $f(x)-f'(x)$ | $F(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，$F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}$ |

提醒：高中数学并没有系统性地学习不定积分，高考对求导逆运算（构造原函数）的要求并不高，不需要钻研一些特别复杂的构造，掌握常见的几种构造形式即可.

## 典型例题

### 类型Ⅰ：加减法构造



【例 1】设偶函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导数 $f'(x)$，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)<2x$，若 $f(2a-2)-f(a-4)\ge 3a^2-12$，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）

（A）$[-2,2]$　（B）$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　（C）$(-\infty,-2]$　（D）$[-2,+\infty)$

**解析**：由 $f'(x)<2x$ 想到构造原函数，$f'(x)$ 的一个原函数是 $f(x)$，$2x$ 的一个原函数是 $x^2$，移项构造即可，

由题意，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)<2x$，所以 $f'(x)-2x<0$，设 $g(x)=f(x)-x^2(x\in\mathbf{R})$，

则当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$g'(x)=f'(x)-2x<0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘，

再看要解的不等式，往 $g(x)=f(x)-x^2$ 的形式凑，

$f(2a-2)-f(a-4)\ge 3a^2-12$ 可化为 $f(2a-2)-(2a-2)^2\ge f(a-4)-(a-4)^2$，即 $g(2a-2)\ge g(a-4)$ ①，

前面只得出了 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘，故不能直接将①化为 $2a-2\le a-4$，需结合题干的奇偶性条件来考虑，

又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $g(x)$ 也是偶函数，故不等式①等价于 $g(|2a-2|)\ge g(|a-4|)$，

结合 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘可得 $|2a-2|\le|a-4|$，解得：$-2\le a\le 2$.

**答案**：A

【总结】①若给出的含 $f'(x)$ 的不等式各部分都容易看出原函数，则直接移项到同一侧，构造原函数即可；②本题若将条件 $f'(x)<2x$ 改为 $\dfrac{f'(x)}{x}-2<0(x>0)$，你还会做吗？其实只需两端乘以 $x$，就和本题相同了. 像这种所给不等式中只有 $f'(x)$，没有 $f(x)$ 的情形，常孤立出 $f'(x)$，再构造.

**类型Ⅱ：乘除法构造**

【例2】定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足当$x<0$时，$f(x)+xf'(x)<0$，若$a=(\sin 1)\cdot f(\sin 1)$，$b=(\ln 3)\cdot f(\ln 3)$，$c=2f(2)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）

（A）$a>c>b$　　（B）$b>a>c$　　（C）$c>a>b$　　（D）$a>b>c$

**解析**：由所给不等式中的$f(x)+xf'(x)$这一结构想到应构造函数$y=xf(x)$，

设$g(x)=xf(x)$，因为$f(x)$为偶函数，所以$g(x)$为奇函数，

且当$x<0$时，$g'(x)=f(x)+xf'(x)<0$，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上↘，

要比较的$a$，$b$，$c$即为$g(\sin 1)$，$g(\ln 3)$，$g(2)$，自变量均为正，故需分析$g(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性，

因为$g(x)$为奇函数且在$(-\infty,0)$上↘，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上也↘，

又$0<\sin 1<1<\ln 3<2$，所以$g(\sin 1)>g(\ln 3)>g(2)$，故$a>b>c$.

**答案**：D

【变式1】设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，其导函数为$f'(x)$，满足$f(x)-xf'(x)>0$，若$a=4f(1)$，$b=2f(2)$，$c=f(4)$，则（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$c>a>b$　　（C）$b>c>a$　　（D）$c>b>a$

**解析**：看到$f(x)-xf'(x)$这种结构，想到构造原函数$y=\dfrac{f(x)}{x}$，



设$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$，则$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，由$f(x)-xf'(x)>0$得$xf'(x)-f(x)<0$，所以$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上↘，比大小的$a$，$b$，$c$中涉及$f(1)$，$f(2)$，$f(4)$，故先比较$g(1)$，$g(2)$，$g(4)$，

因为$0<1<2<4$，所以$g(1)>g(2)>g(4)$，故$\dfrac{f(1)}{1}>\dfrac{f(2)}{2}>\dfrac{f(4)}{4}$，

同乘以4可得$4f(1)>2f(2)>f(4)$，即$a>b>c$.

【反思】从例2和上面的变式1可以看出，所给的含$f'(x)$和$f(x)$的不等式中涉及加法，则构造的原函数大概率为两项之积；若是减法，则很可能为两项之商.

**答案**：A

【变式2】设函数$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的可导函数，其导函数为$f'(x)$，且有$xf'(x)>2f(x)$，则不等式$4f(x-2022)-(x-2022)^2f(2)<0$的解集为（　　）

（A）$(0,2023)$　　（B）$(2022,2024)$　　（C）$(2022,+\infty)$　　（D）$(-\infty,2023)$

**解析**：所给不等式可变形成$xf'(x)-2f(x)>0$，$f(x)$前多了个系数2，不能构造$\dfrac{f(x)}{x}$，应构造$\dfrac{f(x)}{x^2}$，

由$xf'(x)>2f(x)$得$xf'(x)-2f(x)>0$，设$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，则$g'(x)=\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}>0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上↗，目标中有$f(x-2022)$和$f(2)$，应化为关于$g(x-2022)$和$g(2)$的不等式来解，

在 $4f(x-2022)-(x-2022)^2f(2)<0$ 两端同除以 $4(x-2022)^2$ 可得 $\dfrac{f(x-2022)}{(x-2022)^2}-\dfrac{f(2)}{2^2}<0$，

所以 $\dfrac{f(x-2022)}{(x-2022)^2}<\dfrac{f(2)}{2^2}$，从而 $g(x-2022)<g(2)$，故 $0<x-2022<2$，解得： $2022<x<2024$.

**答案**：B

**【反思】**构造原函数时应注意，有时要把所给不等式简单变形，才能看出原函数. 例如本题只要在 $xf'(x)-2f(x)$ 上乘个 $x$，化为 $x^2f'(x)-2xf(x)$，就能看出它是 $\dfrac{f(x)}{x^2}$ 求导后的分子.

【例 3】已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $3f(x)+f'(x)<0$， $f(\ln 2)=1$，则不等式 $f(x)e^{3x}>8$ 的解集为（　　）

（A） $(-\infty,2)$　　（B） $(-\infty,\ln 2)$　　（C） $(\ln 2,+\infty)$　　（D） $(2,+\infty)$

**解析**：要解的不等式中有 $f(x)e^{3x}$，这部分求导为 $[3f(x)+f'(x)]e^{3x}$，恰好有所给结构，构造的思路就有了，

设 $g(x)=f(x)e^{3x}$，则 $g'(x)=[3f(x)+f'(x)]e^{3x}$，由 $3f(x)+f'(x)<0$ 得 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 **R** 上↘，

给了 $f(\ln 2)$，当然要算一下 $g(\ln 2)$，看能否与要解的不等式联系起来，

$g(\ln 2)=f(\ln 2)e^{3\ln 2}=e^{\ln 8}=8$，所以 $f(x)e^{3x}>8\Leftrightarrow g(x)>g(\ln 2)$，结合 $g(x)$ 在 **R** 上↘可得 $x<\ln 2$.

**答案**：B

**【反思】**若所给的含 $f'(x)$ 的不等式中，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 只有系数的差别，常用 $e^{mx}$ 来调节. 具体来说，若为 $f'(x)+mf(x)$，则构造 $f(x)e^{mx}$；若为 $f'(x)-mf(x)$，则构造 $\dfrac{f(x)}{e^{mx}}$.



## 强化训练

1.（2023・陕西西安模拟・★★）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=3$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 恒有 $f'(x)<2(x\in\mathbf{R})$，则不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集为（　　）

（A） $(1,+\infty)$　　（B） $(-\infty,-1)$　　（C） $(-1,1)$　　（D） $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2.（2023・湖北模拟・★★）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x)+xf'(x)>0$，则不等式 $(x+2)f(x+2)>x^2f(x^2)$ 的解集是（　　）

（A） $(-2,1)$　　（B） $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　（C） $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　（D） $(-1,2)$

3．（2022・湖南怀化模拟・★★★）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}<0$，若 $a=2f(1)$，$b=f(2)$，$c=4f(\dfrac{1}{2})$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系为（　　）

（A）$c<b<a$　（B）$c<a<b$　（C）$a<b<c$　（D）$b<a<c$

4.（2023 •贵州模拟 •★★★）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(2)=1$，且对任意的 $x\in \mathbf{R}$，$f'(x)+f(x)>0$，则不等式 $f(x)<\mathrm{e}^{2-x}$ 的解集为_____.

5．（2023・四省联考・★★★）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 **R** 上的导函数存在，且 $f'(x)<g'(x)$，则当 $x\in(a,b)$ 时，有（　　）

（A）$f(x)<g(x)$　（B）$f(x)>g(x)$　（C）$f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$　（D）$f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$